UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

MONOTONICITÀ DI RANGO NELLE MISURE DI CENTRALITÀ

Alessandro Luongo

Facoltà di Scienze e Tecnologie
Dipartimento di INFORMATICA

20-10-2015

Relatore:
Prof. Sebastiano VIGNA

Correlatore:
Prof. Paolo BOLDI

Problema: non c'è una definizione comunemente accettata di centralità in un grafo.
Soluzione: cerchiamo delle condizioni necessarie per definire come *buona* una misura di centralità.

Questo approccio assiomatico serve per conferire rigore matematico a concetti altrimenti vaghi ed intuitivi

- **Assioma di dimensione:** nodi che appartengono a comunità più grandi (a parità di altri fattori) devono avere maggiore importanza.
- **Assioma di densità:** nodi che appartengono a comunità più dense (a parità di altri fattori) devono avere maggiore importanza.
- **Assioma di punteggio:** aggiungere un arco verso un nodo deve aumentare strettamente il suo punteggio. [Boldi and Vigna 2014]

Definizione (Assioma di monotonicità di rango)

Una misura di centralità soddisfa l'assioma di monotonicità di rango se per ogni grafo G, quando aggiungo l'arco da x ad y succede che:

- *I nodi con punteggio minore rimangono con punteggio minore;*
- *I nodi con punteggio minore o uguale rimangono con punteggio minore o uguale.*

$$r_z < r_y \Rightarrow r'_z < r'_y$$
$$r_z \leq r_y \Rightarrow r_z \leq r'_y$$

Inoltre:

- Può essere resa stretta.
- Su grafi fortemente connessi?

- Indegree:

$$D(x) = d^{-}(x)$$

- Closeness:

$$C(x) = \frac{1}{\sum_{y \in G} d(y, x)}$$

- Indice di Lin:

$$L(x) = \frac{|\{y \mid d(y, x) < \infty\}|^2}{\sum_{d(y,x)<\infty} d(y, x)}$$

- Harmonic:

$$H(x) = \sum_{y \neq x, y \in G} \frac{1}{d(y, x)}$$

- Betweenness:

$$B(x) = \sum_{y, z \neq x, \sigma_{yz} \neq 0} \frac{\sigma_{yz}(x)}{\sigma_{yz}}$$

- Autovettore dominante (sinistro):

$$\boldsymbol{v}A = \boldsymbol{v}\lambda_0$$

- Seeley:

$$\boldsymbol{v}\bar{A} = \boldsymbol{v}\lambda_0$$

- Katz:

$$k = \mathbf{1}\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i A^i = (I - \beta A)^{-1}$$

- PageRank:

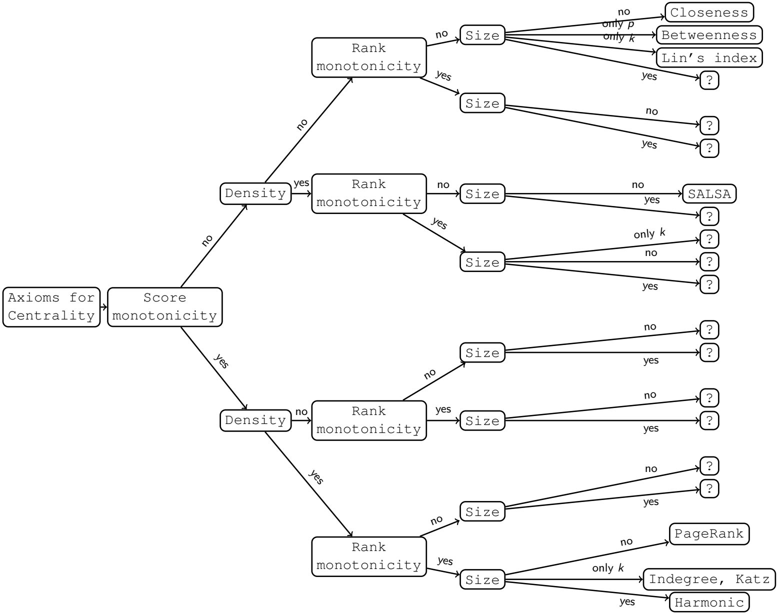
$$\boldsymbol{p} = (I - \alpha)\boldsymbol{v}(I - \alpha\bar{A})^{-1}$$

- SALSA:

$$S(x) = \frac{d^-(x)}{\sum_{k \in K_x} d^-(k)} \frac{|K_x|}{n}.$$

	Monotonicità				Altri assiomi	
	Generale		Fortemente connessi		(Boldi and Vigna 2014)	
Misura	Punteggio	**Rango**	**Punteggio**	**Rango**	Dimensione	Densità
Degree	si	si⋆	si	si⋆	no	si
Harmonic	si	si⋆	si	si⋆	si	si
Closeness	no	no	si	si	no	no
Lin	no	no	si	si	no	no
Betweenness	no	no	no	no	no	no
Dominant	no	?	?	?	no	si
Seeley	no	?	si	si	no	si
Katz	si	si⋆	si	si⋆	no	si
PageRank	si	si⋆	si	si⋆	no	si
SALSA	no	no	no	no	no	si

⋆ = l’assioma è soddisfatto strettamente


Axioms for Centrality
Score monotonicity
no
Density
no
Rank monotonicity
no
Size
no
Closeness
only p
Betweenness
only k
Lin's index
yes
?
yes
Size
no
?
yes
?
yes
Rank monotonicity
no
Size
no
SALSA
yes
?
yes
Size
only k
?
no
?
yes
?
yes
Density
no
Rank monotonicity
no
Size
no
?
yes
?
yes
Size
no
?
yes
?
yes
Rank monotonicity
no
Size
no
?
yes
?
yes
Size
no
PageRank
only k
Indegree, Katz
yes
Harmonic

- La centralità armonica è l’unica centralità che soddisfa tutti gli assiomi.
- Abbiamo un teorema per le centralità spettrali attenuate.
- L’unica misura a beneficiare di connettività forte è la closeness.
- Nel caso generale, tutte le misure monotone nel rango lo sono strettamente.
- Su grafi fortemente connessi, tutte le misure monotone nel punteggio lo sono nel rango, e viceversa.
- L’autovettore dominante sinistro rimane ancora un problema aperto.

Monotonicità di punteggio su grafi fortemente connessi:

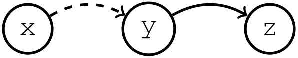
- Betweenness e SALSA la violano.
- Closeness e Lin's index la soddisfano.
- Seeley la soddisfa. [Chien et al. 2004]

Grazie per la gentile attenzione

– What I cannot create I do not understand –

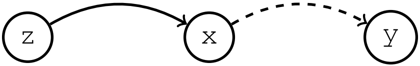
R. Feynman

Closeness centrality: un controesempio



Il punteggio di y e di z prima di aggiungere l'arco è 0. Aggiungendo l'arco solo il punteggio di z sale, diventando $\frac{1}{1+2}$. Il nodo y rimane a 0 perchè z rimane a distanza ∞. Un nodo ex-aequo ha superato il punteggio del nodo che riceve l'arco.

Betweenness centrality: un controesempio



Prima di aggiungere l'arco, il punteggio di tutti e tre i nodi è 0. Poi, l'unico nodo che sale di punteggio è il nodo x, perchè viene attraversato dallo shortest path da z a y.

References

Boldi, Paolo and Sebastiano Vigna (2014). 'Axioms for centrality'. In: *Internet Mathematics* 10.3-4, pp. 222–262.

Chien, Steve et al. (2004). 'Link evolution: Analysis and algorithms'. In: *Internet mathematics* 1.3, pp. 277–304.